أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2003

التمرين الأول:

1

نعلم أن المعادلة الديكارتية للفلكة التي مركزها $\Omega(a,b,c)$ و شعاعها r تكتب بصفة عامة على شكل : $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

نحاول إذن تحديد a و b و c و r انطلاقا من المعادلة الديكارتية للفلكة $(\mathcal{S})$.

لدينا : $(x^2-2x)+y^2+(z^2+2z)+1=0$

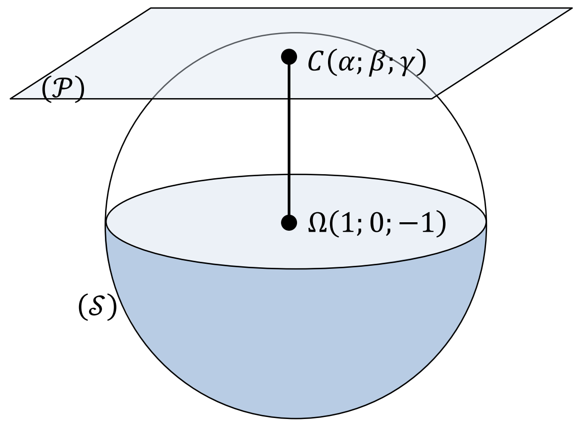
$$\Leftrightarrow (x^2-2x+1-1)+y^2+(z^2+2z+1-1)+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2-1+y^2+(z+1)^2-1+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=1^2$$

إذن $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $\Omega(1,0,-1)$ و شعاعها $r=1$.

2



سوف نبرهن على أن : $d(\Omega,(\mathcal{P}))=r$.

لدينا : $\Omega(1,0,-1)$ و $(\mathcal{P}) : 1x-2y+2z-2=0$

إذن :
$$d(\Omega,(\mathcal{P}))=\frac{|1\times1-2\times0+2\times(-1)-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{9}}=\boxed{1=r}$$

إذن المستوى $(\mathcal{P})$ مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في نقطة $C(\alpha,\beta,\gamma)$.

3

نعتبر المستقيم (ΩC) . لدينا $(\mathcal{P})$ مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في النقطة C .

إذن المستقيم (ΩC) عمودي على المستوى $(\mathcal{P})$.

لدينا : $(\mathcal{P}) : x-2y+2z-2=0$

إذن : $\vec{n}(1,-2,2)$ متجهة منظمية على المستوى $(\mathcal{P})$.

إذن : المتجهتان $\overrightarrow{\Omega C}$ و $\vec{n}$ مستقيميتان .

إذن يوجد عدد حقيقي t بحيث : $\overrightarrow{\Omega C}=t\cdot\vec{n}$.

و منه : $\begin{cases}\alpha-1=t\\ \beta-0=-2t\\ \gamma+1=2t\end{cases}$ يعني : $\boxed{\begin{cases}\alpha=t+1\\ \beta=-2t\\ \gamma=2t-1\end{cases}}$

و الكتابة المؤطرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (ΩC) .

بما أن $C(\alpha,\beta,\gamma)$ نقطة تماس الفلكة $(\mathcal{S})$ و المستوى $(\mathcal{P})$.

فإن : $C\in(\mathcal{P})$ أي : $\alpha-2\beta+2\gamma-2=0$

أي : $(t+1)-2(-2t)+2(2t-1)-2=0$

يعني : $9t=3$ و منه : $t=\frac{1}{3}$

نعوض t بالعدد $\frac{1}{3}$ في التمثيل البارامتري للمستقيم (ΩC)

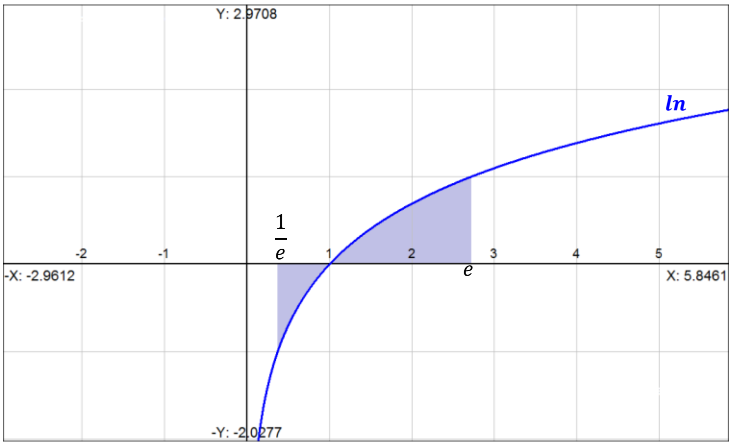
و ذلك لإيجاد α و β و γ :
$$\begin{cases}\alpha=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}\\ \beta=-2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{-2}{3}\\ \gamma=2\left(\frac{1}{3}\right)-1=\frac{-1}{3}\end{cases}$$

و بالتالي : النقطة $C\left(\frac{4}{3};\frac{-2}{3};\frac{-1}{3}\right)$ هي نقطة تماس $(\mathcal{S})$ و المستوى $(\mathcal{P})$

التمرين الثاني:

1

في هذا السؤال نرسم أولا التمثيل المبياني للدالة f على حيز تعريفها $]0;+\infty[$



نلاحظ أنه إذا كان $\in\left[\frac{1}{e};1\right]$ فإن : $\ln x\le 0$ أي : $|\ln x|=-\ln x$

و كذلك إذا كان $[1;e]$ فإن : $\ln x\ge 0$ أي : $|\ln x|=\ln x$

و بالتالي :
$$I=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{x}|\ln x|\,dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}|\ln x|\,dx+\int_{1}^{e}\frac{1}{x}|\ln x|\,dx$$
$$=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}(-\ln x)\,dx+\int_{1}^{e}\frac{1}{x}(\ln x)\,dx$$
$$=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{\ln x}{x}\right)dx+\int_{1}^{e}\left(\frac{\ln x}{x}\right)dx$$

نحتاج إلى تحديد الدالة الأصلية للدالة $x\to\frac{\ln x}{x}$.

و لإيجادها نستعين بتقنية المكاملة بالأجزاء :

$$\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)dx=\int\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{v'}\underbrace{(\ln x)}_{u}\,dx=(\ln x)^2-\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)dx$$

إذن : $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)dx+\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)=(\ln x)^2$

أي : $2\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)dx=(\ln x)^2$

و منه : $\boxed{\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)dx=\frac{(\ln x)^2}{2}}$

نوظف إذن هذه العلاقة في آخر تعبير للتكامل I نجد :

$$\begin{aligned} I &= -\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{\ln x}{x}\right)dx + \int_{1}^{e}\left(\frac{\ln x}{x}\right)dx \\ &= -\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{1}^{e} \\ &= -\left(\frac{(\ln 1)^2}{2} - \frac{\left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2}{2}\right) + \left(\frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2}\right) \\ &= -\left(0 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - 0\right) = \boxed{1} \end{aligned}$$

2 أ

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث : $\dfrac{2t}{1+t} = a + \dfrac{b}{1+t}$

لدينا : $\dfrac{2t}{1+t} = \dfrac{a(1+t)+b}{1+t}$ إذن : $\dfrac{2t}{1+t} = \dfrac{at+(a+b)}{1+t}$

و منه : $\begin{cases} a = 2 \\ a+b = 0 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}$

و بالتالي : $\boxed{(\forall t \neq -1)\ ;\ \dfrac{2t}{1+t} = 2 - \dfrac{2}{1+t}}$

2 ب

$$\boxed{J = \int_{2}^{7}\frac{1}{1+\sqrt{2+x}}\,dx}$$

نريد حساب التكامل J و ذلك باستعمال تقنية تغيير المتغير .

نضع : $t = \sqrt{2+x}$ إذن : $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}} = \dfrac{1}{2t}$

و منه : $dx = 2t\cdot dt$

إذا كان : $x = 2$ فإن : $t = 2$

إذا كان : $x = 7$ فإن : $t = 3$

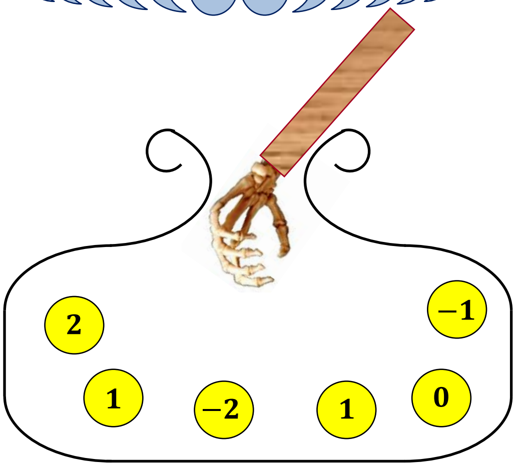
و لدينا كذلك : $\dfrac{1}{1+\sqrt{2+x}} = \dfrac{1}{1+t}$

و بالتالي التكامل J يصبح :

$$\begin{aligned} J &= \int_{2}^{7}\frac{1}{1+\sqrt{2+x}}\,dx = \int_{2}^{3}\left(\frac{1}{1+t}\right)(2t)\,dt \\ &= \int_{2}^{3}\left(\frac{2t}{1+t}\right)dt = \int_{2}^{3}\left(2 - \frac{2}{1+t}\right)dt \\ &= \int_{2}^{3}2\,dt - 2\int_{2}^{3}\left(\frac{1}{1+t}\right)dt \\ &= 2[t]_2^3 - 2[\ln(1+t)]_2^3 \\ &= 2 - 2(\ln(1+3) - \ln(1+2)) \\ &= 2 - 2(\ln 4 - \ln 3) \\ &= 2 - 2\ln\left(\frac{4}{3}\right) = 2\left(1 - \ln\left(\frac{4}{3}\right)\right) \\ &= 2\left(\ln e - \ln\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \boxed{2\ln\left(\frac{3e}{4}\right)} \end{aligned}$$

التمرين الثالث :

1 أ



عندما نسحب في آن واحد ثلاث كرات من كيس يحتوي على 6 كرات فإنه توجد C_6^3 نتيجة ممكنة . و هذا يعني أن : $card(\Omega) = C_6^3 = 20$

بحيث Ω هو كون امكانيات هذه التجربة العشوائية

لحساب احتمال الحدث A أقترح طريقتين :

الطريقة الأولى :

لدينا الحدث A معرف بما يلي :

$A =$" من بين الكرات المسحوبة توجد كرة على الأقل تحمل الرقم 1 "

إذن الحدث $\bar{A}$ أي الحدث المضاد للحدث A معرف بما يلي :

$\bar{A} =$ " الكرات الثلاث المسحوبة تحمل كلها أرقاما تخالف 1 "

و نعلم أن الحدثان A و $\bar{A}$ تربطهما العلاقة التالية : $p(A) + p(\bar{A}) = 1$

عندما نرغب في سحب ثلاث كرات تحمل كلها أرقاما تخالف 1 فإننا نسحب ثلاث كرات في آن واحد من كيس يحتوي على 4 كرات فقط و توجد C_4^3 إمكانية لفعل ذلك . إذن نحسب $p(\bar{A})$ كما يلي :

$$p(\bar{A}) = \frac{card(\bar{A})}{card(\Omega)} = \frac{C_4^3}{20} = \boxed{\frac{4}{20}}$$

و بالتالي : $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \dfrac{1}{5} = \boxed{\dfrac{4}{5}}$

الطريقة الثانية :

$$\begin{aligned} p(A) &= p\left(\begin{array}{c}\text{من الكرات الثلاث}\\ \text{توجد واحدة على}\\ \text{الأقل تحمل الرقم 1}\end{array}\right) \\ &= p\left(\begin{array}{c}\text{كرة واحدة تحمل 1}\\ \text{و الكرتان الأخريان}\\ \text{تخالفان 1}\end{array}\ \text{أو}\ \begin{array}{c}\text{كرتان تحملان 1}\\ \text{و الكرة الثالثة}\\ \text{تخالف 1}\end{array}\right) \\ &= p\left(\begin{array}{c}\text{كرة واحدة تحمل 1}\\ \text{و الكرتان الأخريان}\\ \text{تخالفان 1}\end{array}\right) + p\left(\begin{array}{c}\text{كرتان تحملان 1}\\ \text{و الكرة الثالثة}\\ \text{تخالف 1}\end{array}\right) \\ &= \frac{C_2^1 \times C_4^2}{20} + \frac{C_2^2 \times C_4^1}{20} \\ &= \frac{2\times 6}{20} + \frac{1\times 4}{20} \\ &= \frac{16}{20} = \boxed{\frac{4}{5}} \end{aligned}$$

1 ب

لدينا الاحتمال S معرف بما يلي : " مجموع الأعداد المكتوبة على الكرات المسحوبة منعدم "

توجد إذن ثلاث حالات ممكنة لهذا الحدث و هي كالتالي :

الحالة الأولى : 0 1 -1

الحالة الثانية : 0 2 -2

الحالة الثالثة : 1 1 -2

في الحالة الأولى :

لدينا C_1^1 امكانية لاختيار الكرة 0

و لدينا C_2^1 إمكانية لاختيار الكرة 1

و لدينا C_1^1 إمكانية لاختيار الكرة -1

إذن توجد $C_1^1 \times C_2^1 \times C_1^1$ إمكانية تحقق هذه الحالة الأولى .

في الحالة الثانية :

لدينا C_1^1 امكانية لاختيار الكرة 0

و لدينا C_1^1 إمكانية لاختيار الكرة 2

و لدينا C_1^1 إمكانية لاختيار الكرة -2

إذن توجد $C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^1$ إمكانية تحقق هذه الحالة الأولى .

في الحالة الثالثة :

لدينا C_2^2 امكانية لاختيار الكرتين 1 1

و لدينا C_1^1 إمكانية لاختيار الكرة -2

إذن توجد $C_1^1 \times C_2^2$ إمكانية تحقق هذه الحالة الأولى .

$$p(S) = p(\,0\ 1\ {-1} \text{ أو } 0\ 2\ {-2} \text{ أو } 1\ 1\ {-2}\,)$$

$$= p(0\ 1\ {-1}) + p(0\ 2\ {-2}) + p(1\ 1\ {-2})$$

$$= \frac{C_1^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{20} + \frac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^1}{20} + \frac{C_2^2 \times C_1^1}{20}$$

$$= \frac{2}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{4}{20} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

2

تذكير : عندما نكرر n مرة تجربة عشوائية فإن احتمال وقوع حدث A بالضبط k مرة هو : $p_k(A) = C_n^k (p(A))^k (1-p(A))^{n-k}$

بحيث $p(A)$ هو احتمال الحدث A دون تكرار التجربة .

في هذا التمرين : التجربة هي سحب ثلاث كرات في آن واحد من كيس يحتوي على 6 كرات و نكرر هذه التجربة أربع مرات بشرط إعادة الكرات في كل مرة إلى الكيس.

لدينا احتمال الحدث S يساوي $p(S) = \frac{1}{5}$.

إذن احتمال وقوع الحدث S بالضبط 3 مرات هو :

$$p_3(S) = C_4^3 (p(S))^3 (1-p(S))^{4-3} = 4\left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{5}\right)^1 = \frac{4 \times 1 \times 4}{125 \times 5} = \boxed{\frac{16}{625}}$$

التمرين الرابع :

1 أ

عندما يُطرح سؤال من هذا الشكل فهذا يدل على أنه سوف يشكل مفتاح لما سيأتي فيما بعد :

$$\boxed{(4+i)^2} = 4^2 + 2 \times 4 \times i + i^2 = 16 + 8i - 1 = \boxed{15 + 8i}$$

إذن : $\boxed{(4+i)^2 = 15 + 8i}\ (*)$

1 ب

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) التالية :

$$(E) : \ z^2 + (2-3i)z - 5(1+i) = 0$$

لدينا : $\Delta = (2-3i)^2 + 20(1+i) = 4 - 12i - 9 + 20 + 20i = \boxed{15 + 8i = (4+i)^2}$

إذن المعادلة (E) تقبل حلين مترافقين z_1 و z_2 .

$$z_1 = \frac{-(2-3i)+(4+i)}{2} = \frac{-2+3i+4+i}{2} = \frac{2+4i}{2} = \boxed{1+2i}$$

$$z_1 = \frac{-(2-3i)-(4+i)}{2} = \frac{-2+3i-4-i}{2} = \frac{-6+2i}{2} = \boxed{-3+i}$$

2 أ

$$\boxed{\frac{c-a}{b-a}} = \frac{6i-(1+2i)}{(-3+i)-(1+2i)} = \frac{4i-1}{-4-i} = \frac{(4i-1)(-4+i)}{(-4-i)(-4+i)} = \frac{-17i}{16-(-1)} = \frac{-17i}{17}$$

$$= -i = \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \boxed{e^{\frac{-i\pi}{2}}}$$

2 ب

لدينا حسب السؤال السابق : $\boxed{\frac{c-a}{b-a} = e^{\frac{-\pi i}{2}}}$

إذن : $\begin{cases} \left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{-\pi}{2}\,[\pi] \end{cases}$

و منه : $\begin{cases} |c-a| = |b-a| \\ \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} AC = AB \\ (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \end{cases}$

و بالتالي المثلث ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A و قائم الزاوية في A .

التمرين الخامس:

I 1

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-2\sqrt{x}+2\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x}\right)$$
$$= (+\infty)(1-0+0) = (+\infty)\times 1 = (+\infty)$$

I 2

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{x-2\sqrt{x}+2-2}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to0^+}\frac{x\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{x} = \lim_{x\to0^+}\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right) = 1-\frac{2}{\sqrt{0^+}}$$
$$= 1-(+\infty) = (-\infty) \notin \mathbb{R}$$

حصلنا إذن على : $\boxed{\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = -\infty \notin \mathbb{R}}$

إذن f دالة غير قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر .

I 3

نلاحظ أن الدالة f عبارة عن تشكيلة من الدوال المنسجمة و المعرفة جيدا و القابلة الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$. إذن f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $f'(x) = 1-2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \boxed{\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\right)}$

بما أن : $\forall\, x \in]0;+\infty[\ ;\ \sqrt{x} \geq 0$.

فإن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $\sqrt{x}-1$ على المجال $]0;+\infty[$.

إذا كان $x=1$ فإن : $\sqrt{x}-1=0$.

إذا كان $x>1$ فإن : $\sqrt{x}-1>0$.

إذا كان $x<1$ فإن : $\sqrt{x}-1<0$.

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

إذن يتضح من هذا الجدول أن الدالة f تناقصية على المجال $[0;1]$ و تزايدية على المجال $[1;+\infty[$.

II 1

من أجل $n=0$ لدينا : $1\leq 2\leq 2$ يعني : $1\leq u_0\leq 2$

نفترض أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 1\leq u_n\leq 2$

بما أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $[1;+\infty[$.

فإن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ f(1)\leq f(u_n)\leq f(2)$.

و هذا يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 1\leq u_{n+1}\leq 4-2\sqrt{2}$

و لدينا $2>1$ إذن : $\sqrt{2}>1$ و منه $2\sqrt{2}>2$.

يعني : $-2\sqrt{2}<-2$ أي : $4-2\sqrt{2}<2$

إذن بالرجوع إلى النتيجة $(*)$ نحصل على النتيجة التالية :

$$1\leq u_{n+1}\leq 4-2\sqrt{2}<2$$

و منه : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 1\leq u_{n+1}\leq 2$

و بالتالي حسب مبدأ الترجع نستنتج أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 1\leq u_n\leq 2$

II 2

لدينا: $u_{n+1}-u_n = f(u_n)-u_n = u_n-2\sqrt{u_n}+2-u_n$
$$= 2\left(1-\sqrt{u_n}\right)$$

بما أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n\geq 1$ فإن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \sqrt{u_n}\geq 1$

و منه : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ -\sqrt{u_n}\leq -1$ يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 1-\sqrt{u_n}\leq 0$

يعني : $2\left(1-\sqrt{u_n}\right)\leq 0$ أي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n-u_{n+1}\leq 0$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n\leq u_{n+1}$

و بالتالي : $(u_n)_n$ متتالية تناقصية .

II 3

لدينا حسب ما سبق : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 1\leq u_n\leq 2$

إذن $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية مصغورة بالعدد 1

و بما أنها تناقصية و مصغورة بالعدد 1 فإنها متقاربة .

من جهة ثانية لدينا f دالة متصلة و تزايدية قطعا على المجال $[1;2]$.

إذن ℓ نهاية المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ هي حل للمعادلة : $f(\ell)=\ell$

يعني : $\ell-2\sqrt{\ell}+2=\ell$ أي : $-2\sqrt{\ell}+2=0$

يعني : $\sqrt{\ell}=1$ و بالتالي : $\boxed{\ell=1}$

III 1 أ

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(x-2\sqrt{x}+2\right) = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(f(x)\right)$$

نعلم أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

إذن : $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(f(x)\right) = \ln(+\infty) = +\infty$

و بالتالي : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

III 1 ب

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x-2\sqrt{x}+2\right)}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x-2\sqrt{x}+2\right)}{\left(x-2\sqrt{x}+2\right)}\times\frac{\left(x-2\sqrt{x}+2\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x-2\sqrt{x}+2)}{(x-2\sqrt{x}+2)} \times \left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x}\right)$$

لدينا من جهة : $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x-2\sqrt{x}+2)}{(x-2\sqrt{x}+2)} = \lim_{\substack{t\to+\infty \\ t=x-2\sqrt{x}+2}} \left(\frac{\ln t}{t}\right) = 0$

و من جهة أخرى : $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x}\right) = (1-0+0) = 1$

و بالتالي : $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0 \times 1 = 0$

حصلنا لحد الآن على النهايتين التاليتين :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0} \quad \text{و} \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$$

إذن $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل .

2 III

لدراسة الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ نبدأ بدراسة الإشتقاق .

نبرهن أولا على أن g قابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$ ثم بعد ذلك نسحب مشتقتها g' .

<u>**تذكير**</u> : لتكن g دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على المجال I و f دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال J . إذن تكون الدالة $g \circ f$ قابلة للإشتقاق على المجال I إذا كانت جل صور عناصر المجال I بالدالة g تقبل صورا بالدالة f . أو بتعبير آخر : $g(I) \subseteq J$.

في هذا التمرين لدينا : f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ و ln دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$.
إذن تكون الدالة $\ln(f)$ قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$
إذا كان : $f([0;+\infty[) \subseteq]0;+\infty[$

و من أجل ذلك نختار عنصرا x من المجال $[0;+\infty[$ و نبرهن على أن صورته $f(x)$ تنتمي إلى المجال $]0;+\infty[$.

بالرجوع إلى جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن f متصلة على المجال $[0;+\infty[$ و تمتلك قيمة دنوية و هي 1 .

هذا يعني أن : $\forall\, x \in [0;+\infty[\ ;\ f(x) \geq 1$

إذن : $\forall\, x \in [0;+\infty[\ ;\ f(x) > 0$

و بالتالي : $\forall\, x \in [0;+\infty[\ ;\ f(x) \in]0;+\infty[$

يعني : $\boxed{f([0;+\infty[) \subset]0;+\infty[}\ (*)$

نعطي الآن الضوء الأخضر لاشتقاق الدالة g .

لدينا : $g(x) = \ln(f(x))$ إذن : $\displaystyle g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

لدينا حسب الجزء الأول : $\displaystyle f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

إذن : $\displaystyle g'(x) = \frac{1}{f(x)}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}f(x)}$

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f : $\forall\, x \in [0;+\infty[\ ;\ f(x) > 0$

بما أن : $\forall\, x \in [0;+\infty[\ ;\ \sqrt{x} \geq 0$

فإن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(\sqrt{x}-1)$.

إذا كان $x = 1$ فإن : $g'(x) = 0$

إذا كان $x > 1$ فإن : $g'(x) > 0$

إذا كان $x < 1$ فإن : $g'(x) < 0$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة g كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$\ln 2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

إذن g دالة تناقصية على المجال $[0;1]$ و تزايدية على المجال $[1;+\infty[$.

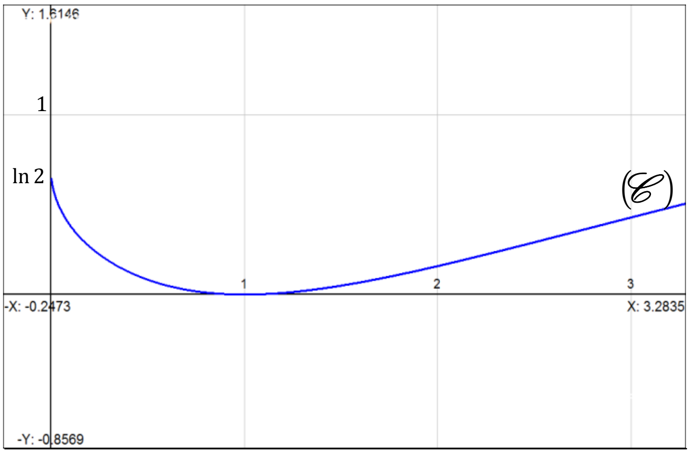
3 III

المعلومة الواردة في المعطيات : $\displaystyle \lim_{x\to0^+} \left(\frac{g(x)-g(0)}{x}\right) = -\infty$

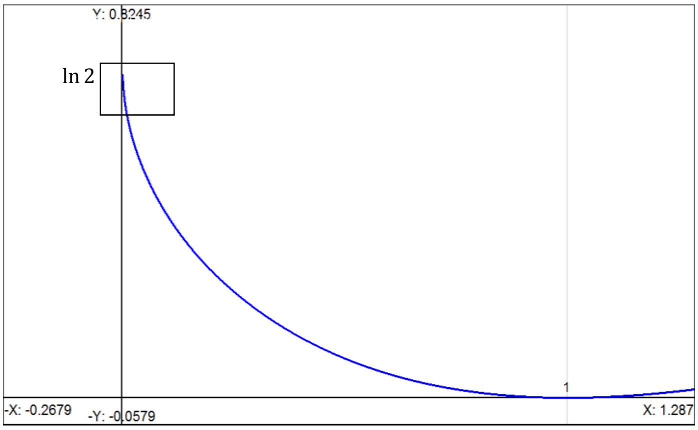
تدل على أن الدالة g غير قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر .

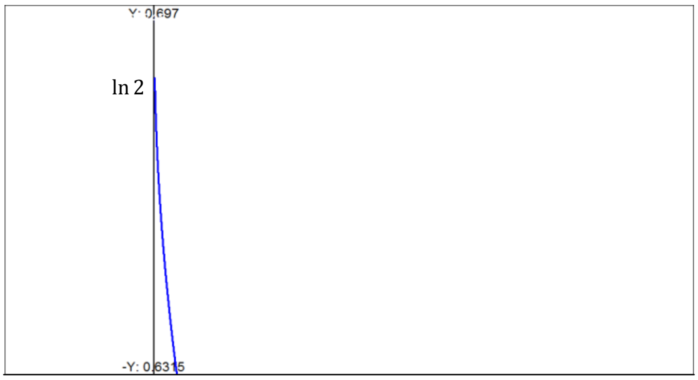
و هذا يعني مبيانيا أن محور الأراتيب مماس عمودي للمنحنى $(\mathscr{C})$ على يمين 0

نحصل إذن على التمثيل المبياني للدالة g كما يلي :



أظيف هاذين المبيانين لكي ألفت انتباهك إلى ما يحدث على يمين الصفر





III 4 أ

لدينا الدالة h هي قصور الدالة g على المجال $[1;+\infty[$.

إذن h دالة معرفة بما يلي :
$$\boxed{\begin{array}{l} h : [1;+\infty[\ \to J \\ \quad x \ \to h(x) = g(x) \end{array}}$$

بحيث J مجال وجب تحديده .

لدينا h دالة متصلة و تزايدية قطعا على المجال $[1;+\infty[$ و ذلك حسب دراسة الدالة g .

و منه h تقابل من المجال $[1;+\infty[$ نحو صورته J بالدالة h يعني :
$$h([1;+\infty[) = \left[h(1)\,;\ \lim_{x\to+\infty} h(x)\right[= \left[g(1)\,;\ \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[= [0;+\infty[= J$$

إذن h تقابل من المجال $[1;+\infty[$ نحو المجال $[0;+\infty[$.

و منه الدالة h تصبح :
$$\boxed{\begin{array}{l} h : [1;+\infty[\ \to [0;+\infty[\\ \quad x \ \to h(x) = g(x) \end{array}}$$

III 4 ب

بما أن h تقابل من المجال $[1;+\infty[$ نحو المجال $[0;+\infty[$

فإن h تقبل دالة أصلية عكسية h^{-1} معرفة بما يلي :
$$\boxed{\begin{array}{l} h^{-1} : [0;+\infty[\ \to [1;+\infty[\\ \quad y \ \to h^{-1}(y) \end{array}}$$

يكفي الآن تحديد التعبير الصريح للدالة h^{-1} .

ليكن y عنصرا من المجال $[0;+\infty[$.

إذن بما أن h تقابل فإن : $\exists! \, x \in [1;+\infty[\ ; \ h(x) = y$

أي : $\exists! \, x \in [1;+\infty[\ ; \ \ln\left(x - 2\sqrt{x} + 2\right) = y$

يعني : $\exists! \, x \in [1;+\infty[\ ; \ x - 2\sqrt{x} + 2 = e^y$

يعني : $\exists! \, x \in [1;+\infty[\ ; \ x - 2\sqrt{x} + (2 - e^y) = 0$

لنحل المعادلة : $x - 2\sqrt{x} + (2 - e^y) = 0$ ذات المجهول x .

نضع $t = \sqrt{x}$ و المعادلة تصبح : $t^2 - 2t + (2 - e^y) = 0$

لدينا :
$$\begin{aligned} \Delta &= (-2)^2 - 4(2 - e^y) = 4 - 8 + 4e^y \\ &= -4 + 4e^y = \boxed{4(e^y - 1)} \end{aligned}$$

نعلم أن $\in [0;+\infty[$ يعني : $y \geq 0$

و منه : $e^y \geq 1$ أي : $e^y - 1 \geq 0$

أي : $4(e^y - 1) \geq 0$ يعني : $\boxed{\Delta \geq 0}$

إذن المعادلة تقبل حلين حقيقيين t_1 و t_2 معرفين بما يلي :
$$\boxed{t_2 = \frac{2 + 2\sqrt{e^y - 1}}{2} = \boxed{1 + \sqrt{e^y - 1}}} \quad \text{و} \quad \boxed{t_1 = \frac{2 - 2\sqrt{e^y - 1}}{2} = \boxed{1 - \sqrt{e^y - 1}}}$$

لدينا $y \in [0;+\infty[$ يعني : $y \geq 0$

أي : $e^y \geq 1$ أي : $e^y - 1 \geq 0$

أي : $\sqrt{e^y - 1} \geq 0$ أي : $-\sqrt{e^y - 1} \leq 0$

و منه : $1 - \sqrt{e^y - 1} \leq 1$ يعني : $\boxed{t_1 \leq 1}$ **(1)**

و بنفس الطريقة لدينا : $y \in [0;+\infty[$ إذن : $\sqrt{e^y - 1} \geq 0$

أي : $1 + \sqrt{e^y - 1} \geq 1$ يعني : $\boxed{t_2 \geq 1}$ **(2)**

بما أن $x \in [1;+\infty[$ فإن : $\sqrt{x} \in [1;+\infty[$

يعني : $\boxed{t \in [1;+\infty[}$ **(3)**

من النتائج (1) و (2) و (3) نستنتج أن المعادلة تقبل حلا فقط و هو t_2 .

و ذلك لأن : $t_2 \in [1;+\infty[$ و $t_1 \notin [1;+\infty[$

إذن : $t = \sqrt{x} = 1 + \sqrt{e^y - 1}$

يعني : $x = \left(1 + \sqrt{e^y - 1}\right)^2$

يعني : $x = 1 + 2\sqrt{e^y - 1} + \left(\sqrt{e^y - 1}\right)^2$

يعني : $x = 1 + 2\sqrt{e^y - 1} + e^y - 1$

يعني : $x = 2\sqrt{e^y - 1} + e^y = h^{-1}(y)$

نستنتج إذن تعبير الدالة h^{-1} كما يلي :
$$\boxed{\begin{array}{l} h^{-1} : [0;+\infty[\ \to [1;+\infty[\\ \quad y \ \to h^{-1}(y) = 2\sqrt{e^y - 1} + e^y \end{array}}$$

<u>إضافة</u> : التمثيلان المبيانيان للدالتين h و h^{-1} متماثلان بالنسبة للمُنَصِّف الأول للمعلم و هذا ما يجسده الرسم المبيني التالي :